Том 25, № 131 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-290-298
УДК 517.977

Об одном представлении множества разрешимости в задаче удержания

Дмитрий Александрович СЕРКОВ
ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

On a representation of the solvability set in the retention problem

Dmitriy A. SERKOV
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation

Аннотация. В работе приводится еще один итерационный способ построения разрешающего множества в игровой задаче удержания движений абстрактной динамической системы в заданных фазовых ограничениях. В итерационной процедуре вместо оператора программного поглощения предлагается использовать семейство операторов поглощения для отдельных программных помех. Такой подход к построению множества разрешимости опирается на теоремы о существовании и представлении общих неподвижных точках семейства отображений.

Ключевые слова: метод программных итераций; игровая задача удержания; общие неподвижные точки

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00410_а).

Для цитирования: *Серков Д.А.* Об одном представлении множества разрешимости в задаче удержания // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 131. С. 290–298. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-290-298.

Abstract. The paper provides another iterative method for constructing a resolving set in the game problem of retaining the movements of an abstract dynamic system in given phase constraints. In the iterative procedure, instead of the program absorption operator, it is proposed to use a family of absorption operators for individual program disturbances. Such an approach is based on theorems on the existence and representation of common fix-points of a family of mappings.

Keywords: method of programmed iterations; game problem of retention; common fix-points

Acknowledgements: The work is supported by the Russian Fund for Basic Research (project no. 18-01-00410_a).

For citation: Serkov D.A. Ob odnom predstavlenii mnozhestva razreshimosti v zadache uderzhaniya [On a representation of the solvability set in the retention problem]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 131, pp. 290–298. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-290-298. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Активно используемый в теории дифференциальных игр (см. [1,2]) метод программных итераций (см. [3–5]) опирается на существование неподвижной точки подходящего оператора программного поглощения (ОПП). Этот оператор, рассматриваемый как преобразование булеана фазовых состояний управляемой системы, является нижней (в смысле отношения вложения) огибающей семейства операторов поглощения фиксированных допустимых реализаций помехи. Из этого обстоятельства и свойства сужаемости рассматриваемых операторов следует, что неподвижные точки ОПП суть в точности общие неподвижные точки семейства операторов поглощения для отдельных помех. Можно пойти дальше, заметив, что у любых двух таких семейств сужающих отображений, имеющих одинаковую нижнюю огибающую, множества общих неподвижных точек совпадают. То есть, любое семейство сужающих операторов (порожденное некоторым п/м помех) и имеющее рассматриваемый ОПП своей нижней огибающей, дает описание неподвижных точек этого ОПП. Известно (см., например, [6]), что для представления общих неподвижных точек семейства отображений также применимы итерационные пределы. Таким образом, при подходящих обстоятельствах мы можем на шаге итерационной процедуры перейти от ОПП к оператору поглощения при фиксированной помехе из выбранного п/м помех. Итак, появляется возможность подбирать наиболее удобное с той или иной точки зрения п/м помех и получать соответствующее представление решения исходной дифференциальной игры.

Формальное изложение мы проведем в рамках игровой задачи удержания для абстрактной динамической системы [7] и проиллюстрируем на примере системы с простыми движениями. Дальнейший текст организован так: пункт 1 содержит обозначения и определения общего характера, 2 — сведения из теории неподвижных точек, 3 — постановка задачи удержания и основные результаты, 4 — пример.

1. Обозначения и определения общего характера

Используется теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки, $\varnothing$ — пустое множество); $\triangleq$ — равенство по определению. Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Пусть $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N}$ — натуральный ряд.

Через $\mathcal{P}(T)$ (через $\mathcal{P}'(T)$) условимся обозначать семейство всех (всех непустых) п/м произвольного множества T; семейство $\mathcal{P}(T)$ именуем также булеаном множества T. Если A и B — непустые множества, то B^A есть множество всех отображений из A в B (см. [8, с. 77]). Если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$, то $(f\,|\,C) \in B^C$ есть сужение f на множество C: $(f\,|\,C)(x) \triangleq f(x)\ \ \forall x \in C$. В случае, когда $F \in \mathcal{P}'(B^A)$, полагаем $\big(F\,|\,C\big) \triangleq \{(f\,|\,C) : f \in F\}$.

Всякое линейно упорядоченное п/м частично упорядоченного множества (ЧУМ) назовем *цепью*. Назовем ЧУМ $(X, \preccurlyeq)$ *индуктивным*, если всякая его цепь C (в том числе и пустая) имеет нижнюю грань $\inf C \in X$. Для $Y \in \mathcal{P}(X)$ обозначим $\top_Y$ и $\bot_Y$ наибольший и наименьший элементы ЧУМ Y, соответственно, если они существуют. Отметим, что в индуктивном ЧУМ существует наибольший элемент — это нижняя грань пустой цепи.

Для отображения $f \in X^X$ обозначим $\mathbf{Fix}(f)$ множество всех его неподвижных точек: $\mathbf{Fix}(f) \triangleq \{x \in X \mid f(x) = x\}$. Если $\mathbf{F} \in \mathcal{P}(X^X)$, то $\mathbf{Fix}(\mathbf{F}) \triangleq \cap_{f \in \mathbf{F}} \mathbf{Fix}(f)$. Пусть $(X, \preccurlyeq)$ — ЧУМ и $f \in X^X$. Назовем f — *сужающим на* $(X, \preccurlyeq)$, если $f(x) \preccurlyeq x \quad \forall x \in X$. Назовем f — *изотонным на* $(X, \preccurlyeq)$, если $(x \preccurlyeq x') \Rightarrow (f(x) \preccurlyeq f(x')) \quad \forall x, x' \in X$.

Будем обозначать $\mathbf{ORD}$ класс порядковых чисел (ординалов). Запись $\alpha \in \mathbf{ORD}$ будем рассматривать как сокращение высказывания «α есть порядковое число» («α есть ординал»). Отношение порядка (строгого порядка) на классе $\mathbf{ORD}$ будем обозначать $\preccurlyeq$ ($\prec$). Для всякого $\alpha \in \mathbf{ORD}$ обозначим $\mathbf{W}(\alpha) \triangleq \{\iota \in \mathbf{ORD} \mid \iota \prec \alpha\}$ ($\mathbf{W}_+(\alpha) \triangleq \mathbf{W}(\alpha) \cup \{\alpha\}$) множество всех ординалов меньших (не больших), чем α. Обозначим $\alpha + 1 \in \mathbf{ORD}$ — *последователя* ординала α — наименьший из ординалов, превосходящих α. Последователь всегда существует (см. [8, следствие 8, с. 238] при $Z = \mathbf{W}(\alpha) \cup \{\alpha\}$). Назовем $\alpha \in \mathbf{ORD}$ *регулярным*, если в $\mathbf{W}(\alpha)$ существует наибольший ординал — *предшественник* α; в остальных случаях будем называть α *предельным*. Для всякого множества X обозначим $|X|$ наименьший из ординалов равномощных множеству X. При этом через $|X|^+$ обозначим наименьший из ординалов, превосходящих мощность множества X. В силу данных определений, каково бы ни было множество X невозможно взаимно однозначно отобразить множество ординалов $\mathbf{W}_+(|X|^+)$ в X. Для выбранного множества X будем кратко обозначать этот факт соотношением

$$|X| < |X|^+. \tag{1.1}$$

Для всяких множества X и ординала $\alpha \in \mathbf{ORD}$ назовем α*-последовательностью в* X (α_+*-последовательностью в* X) и обозначим $(x_\iota)_{\mathbf{W}(\alpha)}$ ($(x_\iota)_{\mathbf{W}_+(\alpha)}$) всякое отображение $\mathbf{W}(\alpha) \ni \iota \mapsto x_\iota \in X$ ($\mathbf{W}_+(\alpha) \ni \iota \mapsto x_\iota \in X$) из множества отображений $X^{\mathbf{W}(\alpha)}$ ($X^{\mathbf{W}_+(\alpha)}$). Иногда будем также называть α-последовательностью множество $\{x_\iota : \iota \in \mathbf{W}(\alpha)\}$ значений этого отображения.

2. Композиции отображений и представление неподвижных точек в ЧУМ

Хотя приводимые в этом пункте построения и утверждения корректны в произвольном индуктивном ЧУМ (см. [6, п. 2]), для дальнейшего изложения нам потребуется только случай булеана некоторого множества: предположим, что рассматриваемое ЧУМ $(X, \leq)$ имеет вид $(X, \leq) \triangleq (\mathcal{P}(H), \subset)$, $H \neq \varnothing$.

Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)})$ и $\alpha \in \mathbf{ORD}$. Для любой α_+-последовательности $\phi \triangleq (f_\beta)_{\beta \in \mathbf{W}_+(\alpha)} \in \mathbf{F}^{\mathbf{W}_+(\alpha)}$ во множестве $\mathbf{F}$ определим α_+-последовательность отображений $(\phi_\beta)_{\beta \in \mathbf{W}_+(\alpha)}$ (назовем их β-композициями — композиций первых β отображений из α_+-последовательности ϕ): при $\beta = 0$ для всякого f_0 положим ϕ_0 — тождественное отображение $\mathcal{P}(H)$ в себя. Таким образом, $\phi_0 \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$. Пусть теперь отображение $\phi_\eta \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ определено при всех $\eta \in \mathbf{W}(\beta)$. Если β имеет предшественника (пусть это порядковое число γ), то положим $\phi_\beta \triangleq f_\beta \circ \phi_\gamma$. Если β — предельное порядковое число, то положим $\phi_\beta(B) \triangleq f_\beta \left(\bigcap_{\eta \in \mathbf{W}(\beta)} \phi_\eta(B) \right) \ \forall B \in \mathcal{P}(H)$. В обоих случаях отображение ϕ_β определено корректно и $\phi_\beta \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$. Итак, в силу принципа трансфинитной индукции, β-композиция $\phi_\beta \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ определена однозначно для любого $\beta \in \mathbf{W}_+(\alpha)$. В частности, мы можем рассмотреть множество α-композиций всех α_+-последовательностей семейства $\mathbf{F}$ (обозначим его через $\mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}]$): $\mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}] \triangleq \{\phi_\alpha \mid$

$\phi \in \mathbf{F}^{\mathbf{W}_+(\alpha)}\}$. Для всякого $x \in X$ определим множество образов x при действии отображениями из $\mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}]$: $\mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}](x) \triangleq \{\psi(x) \mid \psi \in \mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}]\}$. Сразу отметим, что введенные итерации семейства $\mathbf{F}$ наследуют свойства сужаемости и изотонности, если эти свойства имело семейство $\mathbf{F}$. Кроме того, для произвольного ординала α, выполняется вложение

$$\mathbf{Fix}(\mathbf{F}) \subset \mathbf{Fix}(\mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}]). \tag{2.1}$$

В самом деле, индукцией по «сложности» композиции устанавливается, что при любых $\alpha \in \mathbf{ORD}$, $\psi \in \mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}]$ и $x \in \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$ выполняется равенство $x = \psi(x)$, то есть $x \in \mathbf{Fix}(\mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}])$. В силу произвольного выбора x получаем вложение (2.1).

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathbf{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)})$ — *множество сужающих отображений на* $(\mathcal{P}(H), \subset)$. *Тогда для любого* $M \in \mathcal{P}(H)$ *выполняется*

$$\mathbf{Fix}(\mathbf{F}) \cap \mathrm{ITER}_{|H|^+}[\mathbf{F}](M) \neq \varnothing. \tag{2.2}$$

В частности, $\mathbf{Fix}(\mathbf{F}) \neq \varnothing$.

Приведем схему доказательства этого утверждения. Легко проверяется, что при $M \in \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$ равенство (2.2) верно. Для доказательства утверждения в случае $M \in \mathcal{P}(H) \setminus \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$ предположим противное: найдется $\bar{M} \in \mathcal{P}(H) \setminus \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$ такое, что для любого $\psi \in \mathrm{ITER}_{|H|^+}[\mathbf{F}]$ существует $f \in \mathbf{F}$, для которого выполняется

$$f(\psi(\bar{M})) \neq \psi(\bar{M}). \tag{2.3}$$

Отталкиваясь от предположения (2.3), рассуждениями «от противного» построим $(|H|^+)_+$-последовательность $(M_\iota)_{\mathbf{W}_+(|H|^+)}$ в $\mathcal{P}(H)$ со следующими свойствами:

$$(\iota' \prec \iota) \Rightarrow ((M_\iota \subset M_{\iota'}) \& (M_\iota \neq M_{\iota'})) \qquad \forall \iota, \iota' \in \mathbf{W}_+(|H|^+). \tag{2.4}$$

Продолжая эти построения еще на один шаг, для ординала $|H|^+ + 1$ получим множество $M_{|H|^+ + 1}$ такое, что $M_{|H|^+ + 1} \subset M_{|H|^+}$ и $M_{|H|^+ + 1} \neq M_{|H|^+}$. Отсюда следует, что

$$M_{|H|^+} \neq \varnothing. \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) следует, что для $(|H|^+)_+$-последовательности $(L_\iota)_{\iota \in \mathbf{W}_+(|H|^+)}$ вида

$$L_{|H|^+} \triangleq M_{|H|^+}, \quad L_\iota \triangleq M_\iota \setminus M_{\iota+1}, \qquad \iota \in \mathbf{W}(|H|^+)$$

справедливы соотношения

$$L_\iota \neq \varnothing \qquad \forall \iota \in \mathbf{W}_+(|H|^+), \tag{2.6}$$

$$L_\zeta \cap L_\xi = \varnothing \qquad \forall \zeta, \xi \in \mathbf{W}_+(|H|^+),\ \zeta \neq \xi. \tag{2.7}$$

Воспользуемся аксиомой выбора и определим $(|H|^+)_+$-последовательность $(l_\iota)_{\iota \in \mathbf{W}_+(|H|^+)}$ в H следующим образом:

$$l_\iota \in L_\iota \qquad \iota \in \mathbf{W}_+(|H|^+). \tag{2.8}$$

Ввиду (2.6) это сделать можно. В силу (2.8), (2.7) имеем соотношения

$$l_\iota \in H, \qquad l_\iota \neq l_\eta \qquad \iota, \eta \in \mathbf{W}_+(|H|^+),\ \iota \neq \eta. \tag{2.9}$$

В силу (2.9) $(|H|^+)_+$-последовательность $(l_\iota)_{\iota \in \mathbf{W}_+(|H|^+)}$ есть взаимно однозначное отображение из $\mathbf{W}_+(|H|^+)$ в H, что противоречит выбору $|H|^+$ (см. (1.1)). Значит, предположение (2.3) было ложным и, напротив, всегда выполняются соотношения (2.2). $\square$

Из приведенной схемы доказательства кроме того следует, что при выбранном $x \in X$ для построения «эффективной» для этого x композиции $\phi_{|X|^+} \in \mathrm{ITER}_{|X|^+}[\mathbf{F}]$, $\phi = (f_\iota)_{\iota \in \mathbf{W}_+(|X|^+)}$, то есть такой, что $\phi_{|X|^+}(x) \in \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$, достаточно при выборе элементов $f_{\iota+1} \in \mathbf{F}$ (в случае регулярного $\iota + 1$) соблюдать правило (см. (2.6))

$$f_{\iota+1}(\phi_\iota(x)) \neq \phi_\iota(x), \tag{2.10}$$

пока это возможно. Если же для некоторого $\eta \in \mathbf{W}_+(|X|^+)$ при переборе всех $f \in \mathbf{F}$ очередной элемент $f_{\eta+1}$, удовлетворяющий условию (2.10) при $\iota = \eta$, не существует (в силу теоремы 2.1 такой ординал непременно встретится), то, по определению, мы построили общую неподвижную точку $\phi_\eta(x)$ семейства $\mathbf{F}$: $f(\phi_\eta(x)) = \phi_\eta(x)$ $\forall f \in \mathbf{F}$.

Следствие 2.1. *Пусть* $\mathbf{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)})$ *— множество сужающих изотонных отображений на* $(\mathcal{P}(H), \subset)$. *Тогда*

$$\{\top_{\mathbf{Fix}(\mathbf{F})}\} = \mathbf{Fix}(\mathbf{F}) \cap \mathrm{ITER}_{|H|^+}[\mathbf{F}](H). \tag{2.11}$$

Отметим, что тогда «эффективная» композиция отображений из $\mathbf{F}$ (см. (2.10)) «начинающаяся» в $H = \top_{\mathcal{P}(H)}$, непременно «приводит» нас во множество $\mathbf{Fix}(\mathbf{F})$ и, следовательно, к элементу $\top_{\mathbf{Fix}(\mathbf{F})}$ — наибольшей общей неподвижной точке этого семейства.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.2) в правой части (2.11) стоит непустое множество. Пусть $w \in \mathbf{Fix}(\mathbf{F}) \cap \mathrm{ITER}_{|H|^+}[\mathbf{F}](H)$. Тогда $w = \psi(H)$ для некоторого $\psi \in \mathrm{ITER}_{|H|^+}[\mathbf{F}]$. Выберем произвольно $M \in \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$. Тогда имеем (см. (2.1)) равенство

$$M = \psi(M).$$

С учетом этого равенства, отношения $M \subset H$ и «наследственной» изотонности ψ имеем отношения

$$M = \psi(M) \subset \psi(H) = w.$$

Отсюда в силу произвольного выбора M и единственности наибольшего элемента ЧУМ заключаем, что $w = \top_{\mathbf{Fix}(\mathbf{F})}$. Значит, выполняется (2.11). $\square$

Для семейства отображений $\mathbf{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)})$ всегда определено отображение $\mathfrak{F} \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ (нижняя огибающая семейства $\mathbf{F}$), вида

$$\mathfrak{F}(M) = \bigcap_{f \in \mathbf{F}} f(M) \qquad M \in \mathcal{P}(H). \tag{2.12}$$

Пусть $f, f' \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$. Обозначим $f \vee f'$, $f \wedge f'$ отображения из $\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ вида $(f \vee f')(M) \triangleq f(M) \cap f'(M)$, $(f \wedge f')(M) \triangleq f(M) \cup f'(M)$ $\forall M \in \mathcal{P}(H)$. Для всякого

$X \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)})$ обозначим $\mathfrak{mix}_X$ — п/м отображений из $\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ (включающее X), полученных из элементов множества X путем применения конечного числа операций $\vee$, $\wedge$ и композиции. Индукцией по количеству указанных операций проверяется, что $\mathfrak{mix}_{\bar{\mathbf{F}}} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}\big)$ и верно равенство

$$\mathbf{Fix}(\bar{\mathbf{F}}) = \mathbf{Fix}(\mathfrak{mix}_{\bar{\mathbf{F}}}). \tag{2.13}$$

Лемма 2.1. *Пусть* $\mathbf{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)})$ *— множество сужающих отображений на* $(\mathcal{P}(H), \subset)$ *и* $\mathfrak{F} \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ *имеет вид* (2.12). *Пусть* $\bar{\mathbf{F}} \in \mathcal{P}'(\mathbf{F})$ *выбрано так, что для любого* $M \in \mathcal{P}(H)$ *найдется* $\eta_M \in \mathfrak{mix}_{\bar{\mathbf{F}}}$, *для которого*

$$\eta_M(M) \subset \mathfrak{F}(M)). \tag{2.14}$$

Тогда $\mathbf{Fix}(\mathbf{F}) = \mathbf{Fix}(\bar{\mathbf{F}}) = \mathbf{Fix}(\mathfrak{F})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для обоснования проверим выполнение цепочки вложений: $\mathbf{Fix}(\mathbf{F}) \subset \mathbf{Fix}(\bar{\mathbf{F}}) \subset \mathbf{Fix}(\mathfrak{F}) \subset \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$.

Первое вложение, очевидно, выполнено.

Докажем второе вложение. По теореме 2.1 $\mathbf{Fix}(\bar{\mathbf{F}}) \neq \varnothing$, поэтому пусть $\bar{M} \in \mathbf{Fix}(\bar{\mathbf{F}})$. Найдем в силу условия теоремы $\eta_{\bar{M}} \in \mathfrak{mix}_{\bar{\mathbf{F}}}$ такое, что $\eta_{\bar{M}}(\bar{M}) \subset \mathfrak{F}(\bar{M})$. Из последнего вложения с учетом выбора $\bar{M}$ и равенства $\bar{M} = \eta_{\bar{M}}(\bar{M})$ (см. (2.13)) получим $\bar{M} \subset \mathfrak{F}(\bar{M})$. Из сужаемости $\mathfrak{F}$ тогда имеем равенство $\bar{M} = \mathfrak{F}(\bar{M})$, а значит и включение $\bar{M} \in \mathbf{Fix}(\mathfrak{F})$. В силу произвольности $\bar{M}$ получаем искомое вложение $\mathbf{Fix}(\bar{\mathbf{F}}) \subset \mathbf{Fix}(\mathfrak{F})$.

Обратимся к третьему вложению. Если $\mathbf{Fix}(\mathfrak{F}) = \varnothing$, то вложение, очевидно, выполняется. Пусть теперь $\bar{M} \in \mathbf{Fix}(\mathfrak{F})$. Тогда по определению $\mathfrak{F}$ (см. (2.12)) имеем $\bar{M} = \mathfrak{F}(\bar{M}) \subset f(\bar{M})$ $\forall f \in \mathbf{F}$. Из сужаемости элементов $\mathbf{F}$ и последнего вложения получим $\bar{M} = f(\bar{M})$ $\forall f \in \mathbf{F}$, то есть $\bar{M} \in \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$. В силу произвольного выбора $\bar{M}$ вновь получим искомое вложение $\mathbf{Fix}(\mathfrak{F}) \subset \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$. □

3. Постановка задачи удержания и основные результаты

В качестве пространства позиций выберем непустое множество пар $D \triangleq I \times X$, где $I \subset \mathbb{R}$ аналог временного интервала, а X соответствует фазовому пространству. Если $t \in I$, то $I^t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \leq t\}$ и $\mathbf{I}_t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \geq t\}$. Множество $\mathbf{C} \in \mathcal{P}'(X^I)$ рассматриваем как траектории системы. Пусть $Y \neq \varnothing$ и $\Omega \in \mathcal{P}'(Y^I)$ есть множество помех. Зададим динамику системы отображением $\mathcal{S} : D \times \Omega \mapsto \mathcal{P}'(\mathbf{C})$. Итак, если $(t, x) \in D$ и $\omega \in \Omega$, то $\mathcal{S}((t, x), \omega)$ суть траектории из начальной позиции (t, x) при помехе ω.

Для всякой позиции $(t, x) \in D$ обозначим $\mathbb{M}_{(t,x)}$ множество *квазистратегий* (неупреждающих непустозначных отображений): $\mathbb{M}_{(t,x)} \triangleq \{\alpha \in \mathcal{P}(\mathbf{C})^{\Omega} \mid \forall \omega \in \Omega \ \big(\alpha(\omega) \,|\, \mathbf{I}_t\big) \in \mathcal{P}'\left(\big(\mathcal{S}((t, x), \omega) \,|\, \mathbf{I}_t\big)\right), \ \forall \omega, \omega' \in \Omega \forall \xi \in \mathbf{I}_t \ ((\omega \,|\, I_\xi) = (\omega' \,|\, I_\xi)) \Rightarrow \left(\big(\alpha(\omega) \,|\, I_\xi\big) = \big(\alpha(\omega') \,|\, I_\xi\big)\right)\}$. Элементы $\mathbb{M}_{(t,x)}$ это допустимые процедуры управления, отвечающие начальной позиции (t, x).

Пусть $\mathcal{N} \subset D$ — заданные фазовые ограничения. Будем считать, что *задача удержания в* $\mathcal{N}$ разрешима для начальной позиции (t, x), если существует квазистратегия $\alpha_0 \in \mathbb{M}_{(t,x)}$ такая, что для любых $\tau \in \mathbf{I}_t$, $s \in \alpha_0(\omega)$ и $\omega \in \Omega$ выполняется

$$(\tau, s(\tau)) \in \mathcal{N}. \tag{3.1}$$

Для $H \in \mathcal{P}(D)$, $(t,x) \in D$ и $\omega \in \Omega$ обозначим $\Pi(\omega \mid (t,x), H) \triangleq \{s \in \mathcal{S}((t,x),\omega) \mid (\xi, s(\xi)) \in H \; \forall \xi \in \mathbf{I}_t\}$. Обозначим $\mathbf{A}_\omega$, $\mathbf{A}_\omega \in \mathcal{P}(D)^{\mathcal{P}(D)}$ *оператор поглощения при помехе* $\omega \in \Omega$: $\mathbf{A}_\omega(H) \triangleq \{(t,x) \in H \mid \Pi(\omega \mid (t,x), H) \neq \varnothing\}$, $H \in \mathcal{P}(D)$. Определим ОПП как нижнюю огибающую семейства $\mathfrak{A} \triangleq (\mathbf{A}_\omega)_{\omega \in \Omega}$: $\mathbf{A}(H) \triangleq \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A(H) \;\; \forall H \in \mathcal{P}(D)$.

Далее будем придерживаться соглашения: если $t \in I$, $h \in \mathbf{C}$, $h' \in \mathbf{C}$, $\omega \in \Omega$ и $\omega' \in \Omega$, то отображения $(h \square h')_t \in X^I$ и $(\omega \square \omega')^t \in Y^I$ (склейки движений h, h' и помех ω, ω') определяются соотношениями

$$((h \square h')_t(\xi) \triangleq h(\xi) \; \forall \xi \in I_t) \& ((h \square h')_t(\zeta) \triangleq h'(\zeta) \; \forall \zeta \in \mathbf{I}_t \setminus \{t\})$$

$$((\omega \square \omega')^t(\xi) \triangleq \omega(\xi) \; \forall \xi \in I_t) \& ((\omega \square \omega')^t(\zeta) \triangleq \omega'(\zeta) \; \forall \zeta \in \mathbf{I}_t \setminus \{t\}).$$

У с л о в и е 3.1 (полугрупповое свойство). Для любых $(s,x) \in D$, $\omega \in \Omega$, $h \in \mathcal{S}((s,x),\omega)$ и $t \in \mathbf{I}_s$ выполняется $(h \,|\, \mathbf{I}_t) \in \big(\mathcal{S}((t, h(t)), \omega) \,|\, \mathbf{I}_t\big)$.

У с л о в и е 3.2 (допустимость склейки движений). Для любых $(s,z) \in D$, $t \in \mathbf{I}_s$, $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$, $h \in \mathcal{S}(z,\omega)$ и $\forall h' \in \mathcal{S}((t,h(t)),\omega')$ выполняется

$$((\omega \,|\, I_t) = (\omega' \,|\, I_t)) \Rightarrow ((h \square h')_t \in \mathcal{S}(z,\omega')).$$

У с л о в и е 3.3 (допустимость склейки помех). Для любых $t \in I$, $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$ выполняется $(\omega \square \omega')^t \in \Omega$.

Известно [9, 10], что при выполнении условий 3.1–3.3 множество разрешимости в такой задаче удержания при достаточно общих условиях есть наибольшая неподвижная точка $\mathcal{M} \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ оператора $\mathbf{A}$. При этом, если начальная позиция (t_0, x_0) лежит в $\mathcal{M}$, то отображение $\Omega \ni \omega \mapsto \Pi(\omega \mid (t_0,x_0), \mathcal{M}) \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$ есть элемент множества $\mathbb{M}_{(t_0,x_0)}$ и удерживает все движения во множестве $\mathcal{N}$. Иначе говоря, эта квазистратегия, разрешает задачу удержания (3.1).

Итак, ключевым элементом решения в задаче удержания (3.1) является наибольший элемент $\mathcal{M}$ множества $\mathbf{Fix}(\mathbf{A})$ в ЧУМ $(\mathcal{P}(D), \subset)$. Для построения $\mathcal{M} \triangleq \top_{\mathbf{Fix}(\mathbf{A})}$ применим теорему 2.1, следствие 2.1 и лемму 2.1 к отображению $\mathbf{A}$ и семейству $\mathfrak{A}$.

Это можно сделать, так как введенные отображения $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_\omega$, $\omega \in \Omega$ принадлежат $\mathcal{P}(D)^{\mathcal{P}(D)}$ и удовлетворяют условиям перечисленных утверждений: а именно, они действуют в булеане, являются сужающими, изотонными и состоят в нужном отношении — $\mathbf{A}$ является нижней огибающей семейства $\mathfrak{A}$. Комбинируя эти утверждения, получим следующие результаты:

Теорема 3.1. *Для ординала* $\sigma \preccurlyeq |\mathcal{N}|^+$ *и* σ*-последовательности вида* (2.10) $\phi = (\mathbf{A}_{\omega_\eta})_{\eta \preccurlyeq \sigma}$ *в* $\mathfrak{A}$ *выполняется равенство* $\phi_\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{M}$.

Следствие 3.1. *Пусть* $\mathfrak{A}' \in \mathcal{P}'(\mathfrak{A})$ *выбрано так, что любого* $M \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ *найдется* $\psi \in \mathfrak{mix}_{\mathfrak{A}'}$, *для которого*

$$\psi(M) \subset \mathbf{A}(M). \tag{3.2}$$

Тогда для ординала $\sigma = |\mathcal{N}|^+$ *и* σ*-последовательность вида* (2.10) $\phi' = (\mathbf{A}_{\omega_\eta})_{\eta \preccurlyeq \sigma}$ *в* $\mathfrak{A}'$ *выполняется равенство* $\phi'_\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{M}$.

4. Пример

Положим $I \triangleq \mathbb{R}$, $X \triangleq \mathbb{R}$, $Y \triangleq [-1,1]$, $D \triangleq I \times X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Множество помех $\Omega \in \mathcal{P}(Y^I)$ определим как $L_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap Y^I$ — множество измеримых по Лебегу, существенно ограниченных функций из Y^I.

Для начального состояния $(t,x) \in D$ и помехи $\omega \in \Omega$ динамику $\mathcal{S}((t,x),\omega)$ зададим функциями из $\mathbf{C} \triangleq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ вида

$$\mathcal{S}((t,x),\omega) \triangleq \{h \in \mathbf{C} \mid h(\tau) = x + \int_t^\tau (\omega(s) + u(s))ds,\ \tau \in I, u \in L_1(I,[-1,1])\}, \quad \tau \in I.$$

Множество фазовых ограничений $\mathcal{N} \in \mathcal{P}(D)$ определим как $\mathcal{N} \triangleq D \setminus \{(s,z) \in D \mid s = 0, |z| \leq 1\}$ — все фазовое пространство D за исключением вертикального отрезка, помещенного в начало координат.

Заметим, что определенная таким образом управляемая динамическая система удовлетворяет условиям 3.1–3.3. Следовательно, для нахождения области разрешимости задачи (3.1) в классе квазистратегий достаточно построить наибольшую неподвижную точку соответствующего ОПП. Проведем это построение двумя способами: во-первых, воспользуемся следствием 3.1, подобрав подходящее семейство $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$; во-вторых, найдем наибольшую неподвижную точку ОПП $\mathbf{A}$ для этой системы.

Пусть $\{\omega_1, \omega_{-1}\}$ — п/м двух помех, тождественно равных 1 и -1. Рассмотрим соответствующее семейство операторов поглощения: $\mathfrak{A}' = \{\mathbf{A}_{\omega_1}, \mathbf{A}_{\omega_{-1}}\}$. Можно проверить, что в этой задаче выполняется условие (3.2) и применить следствие 3.1 . Но мы воспользуемся тем, что в этом случае сравнительно просто удается построить наибольшую неподвижную точку $\mathcal{M}'$ семейства $\mathfrak{A}'$. А тогда, учитывая соотношения $\top_{\mathbf{Fix}(\mathfrak{F})} = \top_{\mathbf{Fix}(\mathfrak{A})} \subset \top_{\mathbf{Fix}(\mathfrak{A}')}$, выполняющиеся независимо от условий (2.14), (3.2), достаточно проверить лишь вложение $\mathcal{M}' \subset \mathbf{A}(\mathcal{M}')$, дающее включение $\mathcal{M}' \in \mathbf{Fix}(\mathfrak{F})$.

Строя последовательность значений композиций отображений из $\mathfrak{A}'$ вида

$$\mathbf{A}_{\omega_1}(\mathcal{N}),\ \mathbf{A}_{\omega_1}(\mathbf{A}_{\omega_{-1}}(\mathcal{N})),\ \ldots\ ,\ \mathbf{A}_{\omega_1}(..(\mathbf{A}_{\omega_{-1}{}_i}(\mathcal{N}))..),\ \ldots \quad i \in \mathbb{N}$$

в точке $\mathcal{N}$, мы замечаем, что выполняется условие (2.10) «эффективной» для $\mathcal{N}$ последовательности — все значения различны. Значит (см. теорему 3.1 для случая $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$), эта последовательность сходится к наибольшей неподвижной точке из $\mathbf{Fix}(\mathfrak{A}')$. Так как (для обозримости приведем только четные индексы)

$$\mathbf{A}_{\omega_1}(..(\mathbf{A}_{\omega_{-1}{}_i}(\mathcal{N}))..) = D \setminus \{(s,z) \in D \mid s \leq 0, |z| \leq 1, z \geq -2(s+i-0.5)\}, \quad i = 2k,\ k \in \mathbb{N},$$

в качестве предела $\mathcal{M}' \triangleq \top_{\mathbf{Fix}(\mathfrak{A}')}$ имеем $\mathcal{M}' = D \setminus \{(s,z) \in D \mid s \leq 0, |z| \leq 1\}$. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{M}' \subset \mathbf{A}(\mathcal{M}')$. Поэтому в силу сужаемости $\mathfrak{F}$ выполнено $\mathcal{M}' \in \mathbf{Fix}(\mathfrak{F})$. Тогда имеем $\mathcal{M}' = \top_{\mathbf{Fix}(\mathfrak{F})} \triangleq \mathcal{M}$.

С другой стороны, можно проверить, что $\mathbf{A}^k(\mathcal{N}) = D \setminus \{(s,z) \in D \mid s \in [-k,0], |z| \leq 1\}$ для $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathbf{A}^\infty(\mathcal{N}) \triangleq \cap_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{A}^k(\mathcal{N}) = \mathcal{M}'$. Но согласно выводам метода программных итераций имеет место равенство $\mathbf{A}^\infty(\mathcal{N}) = \top_{\mathbf{Fix}(\mathfrak{F})} \triangleq \mathcal{M}$. Таким образом, два различных по форме представления наибольшей неподвижной точки ОПП приводят к одинаковому множеству разрешимости в рассматриваемой игре.

Так как выполняются условия 3.1–3.3, полученное множество разрешимости $\mathcal{M}'$ дает основу для построения разрешающей задачу квазистратегии вида $\Omega \ni \omega \mapsto \Pi(\omega \mid (t_0,x_0), \mathcal{M}') \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$.

References

[1] Р. Айзекс, *Дифференциальные игры*, Мир, М., 1967. [R. Isaacs, *Differential Games*, Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].

[2] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М., 1974. [N. N. Krasovsky, A. I. Subbotin, *Positional Differential Games*, Nauka Publ., Moscow, 1974 (In Russian)].

[3] А. Г. Ченцов, "Об игровой задаче сближения в заданный момент времени", *Матем. сб.*, **99(141)**:3 (1976), 394–420; англ. пер.:A. G. Chentsov, "On a game problem of converging at a given instant of time", *Math. USSR-Sb.*, **28**:3 (1976), 353–376.

[4] С. В. Чистяков, "К решению игровых задач преследования", *Прикладная математика и механика*, **41**:5 (1977), 825–832. [S. V. Chistyakov, "On solving game problems of pursuit", *Applied Mathematics and Mechanics*, **41**:5 (1977), 825–832 (In Russian)].

[5] В. И. Ухоботов, "Построение стабильного моста для одного класса линейных игр", *Прикладная математика и механика*, **41**:2 (1977), 358–364. [V. I. Ukhobotov, "Construction of a stable bridge for one class of linear games", *Applied Mathematics and Mechanics*, **41**:2 (1977), 358–364 (In Rusian)].

[6] Д. А. Серков, "К построению множества истинности предиката", *Изв. ИМИ УдГУ*, **50** (2017), 45–61. [D. A. Serkov, "On the construction of a predicate truth set", *Izv. IMI UdGU*, **50** (2017), 45–61 (In Russian)].

[7] А. Г. Ченцов, "Метод программных итераций для решения абстрактной задачи удержания", *Автомат. и телемех.*, 2004, №2, 157–169; англ. пер.:A. G. Chentsov, "An abstract confinement problem: a programmed iterations method of solution", *Autom. Remote Control*, **65**:2 (2004), 299–310.

[8] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970. [K. Kuratovsky, A. Mostovsky, *Theory of Sets*, Mir Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

[9] Д. А. Серков, А. Г. Ченцов, "Реализация метода программных итераций в пакетах пространств", *Изв. ИМИ УдГУ*, 2016, №2(48), 42–67. [D. A. Serkov, A. G. Chentsov, "Implementation of the programmed iterations method in packages of spaces", *Izv. IMI UdGU*, 2016, №2(48), 42–67 (In Russian)].

[10] Д. А. Серков, "Трансфинитные последовательности в методе программных итераций", Тр. ИММ УрО РАН, **23**, 2017, 228–240; англ. пер.:D. A. Serkov, "Transfinite sequences in the method of programmed iterations", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **300**:, suppl. 1 (2018), 153–164.

Информация об авторе

Серков Дмитрий Александрович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: serkov@imm.uran.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0628-6217

Поступила в редакцию 25.06.2020
Поступила после рецензирования 10.08.2020
Принята к публикации 09.09.2020

Information about the author

Dmitriy A. Serkov, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: serkov@imm.uran.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0628-6217

Received 25.06.2020
Reviewed 10.08.2020
Accepted for press 09.09.2020